

Интегральное исчисление (элементы теории)

Часть I. Неопределенный интеграл

Определение 1:

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на множестве D , если $\forall x \in D: \exists F'(x) = f(x)$.

Теорема 1:

Если $F(x)$ первообразная $f(x)$, то $F(x) + C$, где $C = const$, также первообразная $f(x)$.

Определение 2:

Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. Линейность

$$\int (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int f(x)dx + B \int g(x)dx.$$

2. Проверка дифференцированием

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

3. Интегрирование полного дифференциала функции

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Прямая замена переменных $x = \varphi(t)$

$$\int F(x)dx = \int F(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int F(\varphi(t)) \varphi'(t)dt.$$

5. Замена переменных с внесением под знак дифференциала $t = \varphi(x)$

$$\int F(\varphi(x)) \varphi'(x)dx = \int F(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int F(t)dt.$$

6. Формула интегрирования по частям

$$\int U(x) dV(x) = U(x)V(x) - \int V(x) dU(x).$$

Таблицу основных неопределенных интегралов нужно знать наизусть. Ее можно найти в любом учебнике или справочнике по математическому анализу.

Часть II. Определенный интеграл

Определение 3:

Определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $x \in [a, b]$ называется предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I_n$ интегральной суммы $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Здесь Δx_i – интервалы на которые разбивается отрезок интегрирования $[a, b]$, $\Delta = \max\{|\Delta x_i|\}$ – наибольшая длина интервала разбиения, а x_i – произвольно выбранная точка в данном интервале Δx_i . Значение предела не должно зависеть от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек x_i .

Теорема 2:

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ существует и равен

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ какая-либо первообразная функции $f(x)$, в частности

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Формула вычисления определенного интеграла, связывающая его с интегралом неопределенным, называется формулой Ньютона-Лейбница. Далее считаем, что все функции под знаком интегралом – непрерывны (если не указано противное). Приведем некоторые полезные свойства определенных интегралов.

Свойства определенного интеграла

1. Линейность определенного интеграла:

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx.$$

2. Аддитивность определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3. Замена переменных. Пусть $x = \varphi(t)$ – монотонная дифференцируемая функция и $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, тогда:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

4. Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b U(x) dV(x) = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) dU(x).$$

5. Интегрирование неравенств. Если $f(x) > g(x)$ при $x \in [a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

6. Теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists x_0 \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b - a).$$

Определение 4:

Средним значением функции на отрезке $[a, b]$ ненулевой длины $(b - a)$ называется величина равная:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Определение 5:

Интегралом с переменным верхним пределом называется определенный интеграл вида

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что $\Phi'(x) = (F(x) - F(a))' = f(x)$, то есть данный интеграл есть первообразная функции $f(x)$, удовлетворяющая дополнительному условию $\Phi(a) = 0$. Аналогично определяется интеграл с переменным нижним пределом. Общее правило дифференцирования интеграла с переменными пределами выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right) = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x).$$

Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$, $y = 0$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и полярной кривой $\rho = f(\varphi)$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

3. Длина дуги кривой $y = f(x)$, заданной в декартовой системе координат, от точки с абсциссой $x = a$ до точки с абсциссой $x = b$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

4. Длина дуги кривой $\rho = f(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, от точки соответствующей $\varphi = \alpha$, до $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi.$$

5. Длина дуги кривой $y = y(t)$, $x = x(t)$ заданной параметрически, от точки соответствующей $t = \alpha$ до точки $t = \beta$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

6. Объем тела с переменным сечением $S = S(x)$, при $x \in [a, b]$ равен:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

7. Объем тела вращения, полученного при вращении относительно оси OX дуги кривой $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

8. Площадь боковой поверхности тела вращения, полученного при вращении относительно оси OX дуги кривой $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$, вычисляется по формуле:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Часть III. Несобственный интеграл

Определение 6:

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования называется предел вида:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если предел равен конечному числу I , то несобственный интеграл называется сходящимся и равным I , в противном случае говорят, что несобственный интеграл расходится. Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами может быть рассмотрен как сумма двух несобственных интегралов (c – конечное число):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

следовательно, для сходимости такого интеграла необходима сходимость обоих несобственных интегралов.

Определение 7:

Несобственным интегралом по отрезку $[a, b]$ от неограниченной в точке $x = b$ (единственная точка разрыва) функции $f(x)$ называется предел вида:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

Если предел существует и равен конечному числу I , то несобственный интеграл называется сходящимся и равным I . Аналогично, несобственным интегралом по отрезку $[a, b]$ от неограниченной в точке $x = a$ функции $f(x)$ называется предел вида:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Если точка x_0 бесконечного разрыва функции $f(x)$ лежит внутри отрезка интегрирования $x_0 \in (a, b)$, то несобственный интеграл представим в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

и для его сходимости требуется независимая сходимость обоих интегралов из правой части равенства. В случае нескольких точек разрыва отрезок интегрирования разбивается на большее количество частей, так, чтобы каждая точка разрыва приходилась на границу отрезка интегрирования.

Следует отметить, что обозначение несобственного интеграла от неограниченной функции совпадает с обозначением определенного интеграла, поэтому за наличием или отсутствием точек разрыва у подынтегральной функции необходимо следить отдельно.

Определение 8:

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. В противном случае, если сам несобственный интеграл от $f(x)$ сходится, а несобственный интеграл от модуля подынтегральной функции расходится, исходный интеграл называется сходящимся условно. Заметим, что из абсолютной сходимости следует "простая" сходимость несобственного интеграла. Обратное же утверждение не верно. Аналогично определяется абсолютная и условная сходимость для других типов несобственных интегралов.

Теорема 3:

Если функция $f(x)$ такова, что $|f(x)| \leq \varphi(x)$ на множестве $[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

Теорема 4:

Если функция $f(x)$ такова, что $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ и } \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

одновременно или оба сходятся, или оба расходятся.

Аналогичные теоремы справедливы для несобственных интегралов других типов. При использовании теорем 3,4 функцию $f(x)$ чаще всего (но далеко не всегда) удобно сравнивать со степенной функцией. Посему приведем значения показателей степени при которых сходятся несобственные интегралы от функции вида $f(x) = x^{-p}$ в виде отдельной теоремы.

Теорема 5:

- 1). $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ для $\forall a > 0$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.
- 2). $I = \int_0^a \frac{dx}{x^q}$ для $\forall a > 0$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q \geq 1$.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

или, в разрешенном относительно старшей производной виде,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

называется *дифференциальным уравнением n -го порядка*. *Решением* уравнения (1) (или (2)) называется функция, определенная и n раз непрерывно дифференцируемая на некотором интервале $x \in (a, b)$, при подстановке которой в уравнение получается тождество, выполненное при всех $x \in (a, b)$. В общем случае уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, которые описываются *общим решением* $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ или *общим интегралом* $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ (общее решение в неявном виде), где C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные константы. Дополняя уравнение (2) начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, где x_0, y_0, \dots, y_{n-1} — заданные числа, приходим к задаче Коши.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Уравнения с разделяющимися переменными — это уравнения, имеющие вид (или приводящиеся к виду)

$$y' = f(x)g(y). \quad (3)$$

Заменив производную отношением дифференциалов dy/dx , умножив обе части на dx и разделив на $g(y)$, приходим к уравнению с разделенными переменными $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, беря интегралы от обеих частей которого, получаем общий интеграл уравнения (3).

2. Уравнения с однородной правой частью, или однородные уравнения — это уравнения вида (или приводящиеся к виду)

$$y' = f(y/x). \quad (4)$$

Заменой $y = ux$, где u — новая неизвестная функция, уравнение (4) сводится к уравнению с разделяющимися переменными $u'x + u = f(u)$.

3. *Линейные уравнения и уравнения Бернулли.* Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad (5)$$

где α — некоторая действительная константа. При $\alpha = 0$ уравнение Бернулли превращается в линейное уравнение

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (6)$$

Уравнение (5) (и, соответственно, (6)) может быть решено методом вариации произвольной постоянной или методом Бернулли. По сути, оба метода реализуют один и тот же способ решения, сводящий решение уравнения (5) (или (6)) к решению двух уравнений с разделяющимися переменными. Приведем описание метода Бернулли.

Будем искать решение уравнения (5) в виде произведения двух функций $y = uv$. Подстановка этого произведения в (5) приводит к уравнению $u'v + uv' + a(x)uv = b(x)u^\alpha v^\alpha$, или

$$u'v + u(v' + a(x)v) = b(x)u^\alpha v^\alpha. \quad (7)$$

Находим функцию $v(x) \neq 0$ такую, что $(v' + a(x)v) = 0$ (последнее уравнение, называемое *линейным однородным уравнением*, допускает, как легко видеть, разделение переменных). Подставляя найденную функцию в (7), приходим к уравнению с разделяющимися переменными относительно u : $u'v(x) = b(x)v^\alpha(x)u^\alpha$.

4. Уравнения в полных дифференциалах — это уравнения вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (8)$$

где функции P и Q удовлетворяют условию $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Как известно, выполнение указанного условия обеспечивает существование функции $U(x, y)$ такой, что $\partial U/\partial x = P$ и $\partial U/\partial y = Q$. Заменяя P и Q в уравнении (8) на $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$, получаем: $dU(x, y) = 0$, откуда $U(x, y) = C$. Последнее равенство представляет собой общий интеграл уравнения (8).

Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. *Линейное уравнение n -го порядка* — это уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (9)$$

где коэффициенты $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ и правая часть $b(x)$ представляют собой определенные на некотором интервале $x \in (a, b)$ непрерывные функции. Если $b(x) = 0 \forall x$, уравнение (9) называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. Любое решение уравнения (9) определено на всем интервале (a, b) .

а) *Однородные линейные уравнения:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$, где C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные константы, а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (10), т.е. совокупность любых n линейно независимых его решений.

Для уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (11)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n = \text{const}$, ФСР может быть найдена с помощью *характеристического уравнения*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (12)$$

Именно, пусть λ_0 — действительный корень (12) кратности k . Тогда уравнение (11) имеет k линейно независимых решений вида $y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = xe^{\lambda_0 x}, \dots, y_k = x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$. Далее, если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно сопряженных корней кратности k (отметим, что мы рассматриваем только уравнения с действительными коэффициентами), то уравнение (11) имеет $2k$ линейно независимых решений $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$. Отыскав все корни характеристического уравнения (12) (напомним, что их ровно n с учетом кратности) и построив по ним решения дифференциального уравнения (12) в соответствии с описанными правилами, получим ФСР.

б) *Неоднородные линейные уравнения.* Общее решение неоднородного линейного уравнения имеет вид $y(x) = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$, где $y_0(x)$

некоторое частное решение уравнения (9) (произвольное), а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (10).

Для нахождения частного решения $y_0(x)$ уравнения (9) используются различные методы, среди которых отметим метод вариации произвольных постоянных, метод подбора решения в случае, когда $b(x)$ является квазимногочленом, и использование преобразования Лапласа (операторный метод). Достаточно громоздкое описание перечисленных методов выходит за рамки настоящего краткого пособия. Мы отсылаем читателя, например, к задачку где принят, как и у нас, конспективный способ изложения.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка.

а) Уравнение, не содержащее y , т.е. уравнение вида $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, сводится к уравнению $(n-1)$ -го порядка путем замены $y' = z(x)$ (соответственно, $y'' = z', \dots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$).

б) Уравнение, не содержащее x , т.е. уравнение вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, сводится к уравнению $(n-1)$ -го порядка путем замены $y' = p(y)$ (соответственно, $y'' = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, $y''' = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2$ и т.д.) В получаемом уравнении роль неизвестной функции играет p , а независимой переменной — y .

в) Уравнение, однородное относительно функции y и ее производных — это уравнение вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, где функция F удовлетворяет для некоторого k условию $F(x, tz_0, tz_1, \dots, tz_n) = t^k F(x, z_0, z_1, \dots, z_n) \quad \forall t > 0, x, z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Заменой $y' = yz$ (соответственно, $y'' = y(z^2 + z')$, $y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$ и т.д.) сводится к уравнению $(n-1)$ -го порядка относительно новой неизвестной функции z .

г) Уравнение, приводящееся к виду $\frac{d}{dx}(G(x, y, y', \dots, y^{(n)})) = 0$. Интегрированием по x сводится к уравнению $(n-1)$ -го порядка $G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = C$.

Системы дифференциальных уравнений.

Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

или, в симметричной форме,

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = dx,$$

зависит от n произвольных постоянных:

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), y_2 = y_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, y_n = y_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Общее решение, записанное в неявном виде:

$$\Phi_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1, \Phi_2(x, y_1, \dots, y_n) = C_2, \dots, \Phi_n(x, y_1, \dots, y_n) = C_n, \quad (12)$$

называется *общим интегралом* системы, а каждое из равенств в (12) — ее *первым интегралом*.

Рассматриваются следующие способы интегрирования систем.

1. *Исключение неизвестных* — полностью аналогичен имеющему то же название способу решения систем алгебраических уравнений. В результате исключения неизвестных система n уравнений первого порядка сводится к одному уравнению n -го порядка с одной неизвестной.

2. *Метод выделения интегрируемых комбинаций* состоит в получении из уравнений системы таких уравнений, которые можно проинтегрировать и получить в результате первые интегралы системы.

3. Отметим также, что линейные системы с постоянными коэффициентами:

$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x), \dots, y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x)$$

можно, как и уравнения соответствующего типа, решать с помощью преобразования Лапласа (операторным методом).