Решение страшной задачи про дифуры. Выполнено в $\LaTeX$

В.В. Птичкин

Решаем дифуры!

Пример 3а - дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$x''(t) + 2\beta\omega_0 x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\beta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Его дискриминант D_1:

$$D_1 = \frac{D}{4} = \beta^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2\left(\beta^2 - 1\right)$$

Его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\beta\omega_0 \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = \omega_0\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}\right)$$

У нас есть 4 возможных решения исходного дифференциального уравнения, т.к. по физическому смыслу частота $\omega_0 > 0$, а коэффициент затухания $\beta \geq 0$. Случаев будет 4:

1. $D_1 > 0, \beta > 1$ — апериодическое затухание
2. $D_1 = 0, \beta = 1$ — пограничное затухание
3. $-1 < D_1 < 0, 0 < \beta < 1$ — затухающие колебания
4. $D_1 = -1, \beta = 0$ — свободные (незатухающие) колебания

Случай I. Апериодическое затухание.

$$x(t) = C_1 e^{\omega_0\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-1}\right)t} + C_2 e^{\omega_0\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-1}\right)t}$$

Т.е. у нас характер изменения величины x - апериодический. Это, строго говоря, вообще не колебания. Берет и затухает. Даже не борясь.

Шутка $:-)$ Кстати, смайлики в $\TeX$ хорошо пишутся в математическом режиме - между долларами, короче говоря.

Случай II. Пограничное затухание.

Здесь двукратный корень $\lambda_{1,2} = -\beta\omega_0$. Тогда решение:

$$x(t) = e^{-\beta\omega_0 t}\left(C_1 t + C_2\right)$$

(простите меня, что я слишком резво тут вынес все за скобки. Но из предыдущих примеров уже должно быть понятно, почему и зачем я позволяю себе такое неслыханное своеволие)

Опять-таки! Нет никаких колебаний. Синусов-косинусов — нету! Тут, правда, возможны вариации. Ведь всегда побеждает решение ~~которое корминнь ты~~ заданное начальными условиями! Здесь может сразу пойти экспонента с отрицательным затуханием, а может сначала пойти рост (когда C_1 отлична от нуля) а потом все равно все затухнет.

Случай III. Затухающие колебания.

Да-да-да! Да! Наконец-то у нас реально что-то будет колебаться! Будут вкусные синусы и косинусы! Да еще какие! Впрочем, обо всем по порядку.

У нас появились комплексно-сопряженные корни. Покажем в явном виде, что они комплексно-сопряженные — вынесем (только сначала присядьте на устойчивую поверхность) из-под корня **минус единицу**:

$$\lambda_{1,2} = \omega_0\left(-\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}\right)$$

Тогда общее выражение для решения уравнения будет иметь вид:

$$x(t) = e^{-\beta\omega_0 t}\left(C_1 \sin\omega_0 t\sqrt{1-\beta^2} + C_2\cos\omega_0 t\sqrt{1-\beta^2}\right) = e^{-\beta\omega_0 t}\left(C_1\sin\omega_d t + C_2\cos\omega_d t\right)$$

где $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}$ — собственная частота затухающих колебаний.

И наконец, финал.

Случай IV. Свободные (незатухающие колебания).

Если $\beta = 0$ — уравнение теряет составную часть с производной первого порядка, и корни характеристического уравнения будут очень просты:

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$$

И его общее решение:

$$x(t) = C_1\sin\omega_0 t + C_2\cos\omega_0 t$$

~~Вот и все!~~ Нет! Пока еще не все!

Пример 3б. Решение задачи Коши для свободных колебаний.

Я очень не хочу мучать моих благодарных случаев решением откровенно зубодробительных задач, но при этом единственным "зубодробителем" в которых является арифметика. Поэтому пример на задачу Коши мы будем брать самый простой — 4-й случай.

Итак, задача. Решить уравнение $x(t)'' + \frac{k}{m}x(t) = 0$, т.е. определить закон движения пружинного маятника если его начальная координата равна x_0 и скорость в начальный момент V_0.

Как нам уже известно, $x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$, что в нашем случае означает

$$x(t) = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Вычислим скорость, т.е. производную координаты:

$$x'(t) = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

В момент времени $t = 0$:

$$x(0) = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} 0 + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} 0 = C_2$$

$$x'(0) = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} 0 - C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} 0 = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

А теперь подставим наши начальные условия... $x(0) = x_0 = C_2$, $x'(0) = V_0 = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}}$

Таким образом, $C_1 = V_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$, а $C_2 = x_0$

И решение задачи Коши (т.е. решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях) приобретает окончательный вид без всяких произвольных постоянных:

$$x(t) = V_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Я уверен, что мой пытливый слушатель точно сможет привести эти 2 функции к одной (синусу или косинусу), разумеется со сдвигом аргумента. К счастью, это не является темой данной задачи.

Вот теперь — все! Ура!
